Parcial de lógica

Lógica y computabilidad

Verano 2018

El examen es a libro abierto y se puede suponer demostrado lo dado en las clases y los ejercicios de las guías colocando referencias claras. Entregar cada ejercicio en hojas separadas. En cada hoja deben figurar nombre y apellido.

Ejercicio 1. Sea $\Gamma \subseteq \mathbf{Form}$ un conjunto consistente de fórmulas de la lógica proposicional. Llamamos $\mathbf{Var}(\Gamma)$ al conjunto de variables proposicionales que aparecen en alguna fórmula de Γ (i.e., $\mathbf{Var}(\Gamma) = \bigcup_{\varphi \in \Gamma} \mathbf{Var}(\varphi)$). Decidir en cada caso si la afirmación es verdadera o falsa y justificar apropiadamente.

a. Si $\mathbf{Var}(\Gamma)$ es infinito, entonces $\mathbf{Con}(\Gamma)$ es maximal consistente.

b. Si $\mathbf{Con}(\Gamma)$ es maximal consistente, entonces $\mathbf{Var}(\Gamma)$ es infinito.

Ejercicio 2. Decimos que un conjunto de fórmulas de la lógica proposicional Γ es *individualizable*, si para cada fórmula $\varphi \in \Gamma$ existe una valuación v tal que para toda fórmula $\psi \in \Gamma$, $v \models \psi$ si y solo si $\psi = \varphi$ (en otras palabras, Γ es individualizante cuando para cada fórmula de Γ hay una valuación que hace verdadera solo a a esa fórmula dentro de Γ). Decida y demuestre si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a. Si Γ es individualizable, entonces es satisfacible.

b. Si Γ es individualizable e infinito, entonces $\Gamma' = \{\neg\varphi : \varphi \in \Gamma\}$ es satisfacible.

Ejercicio 3. Se dice que una función f es *oscilante* si existen infinitos valores x_i con $x_{i+1} > x_i$, tales que $f(x_i) > f(x_{i+1})$ para todo i par, y $f(x_i) < f(x_{i+1})$ para todo i impar. Demuestre que no es expresable en primer orden en el lenguaje con igualdad que tiene solo el símbolo de función f la proposición "f es oscilante". tiene simbolo de Desigualdad

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}; <_z \rangle$ el modelo usual de los enteros con la relación "es menor a". Considerar un lenguaje de primer orden con igualdad $\mathcal{L}$ con un símbolo de predicado $<$. Sea la siguiente axiomatización $SQ_{\mathcal{Z}}$ que extiende a SQ con los siguientes axiomas:

S1$(\forall x)\neg(x < x)$

S2$(\forall x)(\forall y)(x < y \to \neg(y < x))$

S3$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x < y \land y < z) \to x < z)$

S4$(\forall x)(\forall y)(\neg(x = y) \to (x < y \lor y < x))$

S5$(\forall x)(\exists y)x < y$

a) Demostrar que el axioma **S4** es válido en $\mathcal{Z}$.

b) Dar una fórmula φ y un modelo $\mathcal{M}$ tal que:

I) todos los axiomas de $SQ_{\mathcal{Z}}$ sean válidos en $\mathcal{M}$;

II) $\mathcal{M} \not\models \varphi$;

III) $\mathcal{Z} \models \varphi$.

(Alcanza con exhibir la fórmula y el modelo).

c) Asumiendo que $SQ_{\mathcal{Z}}$ es correcto para $\mathcal{Z}$, demostrar que $SQ_{\mathcal{Z}}$ no es completa respecto a $\mathcal{Z}$.